150

Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

I. Actions de groupes.

Définition 1 : On dit qu'un groupe G opère sur un ensemble X, s'il existe une application :

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x, \text{ vérifiant : } 1)\ e \cdot x = x, \forall x \in X$$
$$2)\ g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x \text{ pour tout } g, g' \in G, \text{ et } x \in X.$$

Définition 2 : Soient $g \in G$, et $x \in X$.

Orbite : L'ensemble $O(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ est appelé orbite de x.

Stabilisateur : L'ensemble $Stab(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ est appelé stabilisateur de x.

Théorème 3 : Si G est fini pour tout $x \in X$, on a :
$$Card(G) = Card(O(x)) \times Card(Stab(x)).$$

II. Action par translation.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

1. ... de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$, Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

Définition 4 : 1) L'application : $GL_m(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$, $(P, A) \longmapsto P \cdot A = PA$ définit une action de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$, appelée translation à gauche.

2) L'application $GL_m(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,m}(\mathbb{K})$, $(P ; A) \longmapsto P \cdot A = AP^{-1}$ définit une action de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$, appelée translation à droite.

Proposition 5 : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Pour tout supplémentaire H de $\ker(u)$ dans E, $u_{|H} : H \longrightarrow Im(u)$ est un isomorphisme.

2) On a $\ker(u) \subset \ker(v)$ si et seulement si, il existe $w \in \mathcal{L}(Im(u), Im(v))$, tel que $w \circ u = v$

3) Soient H et G supplémentaires de $\ker(u)$ et $\ker(v)$ dans E (respectivement). Alors, $Im(v) \subset Im(u)$ si et seulement si, il existe $w \in \mathcal{L}(G, H)$, tel que : $v = u \circ w$.

Définition 6 : Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On appelle invariant, une application définit sur X, constante sur les orbites. Un invariant est total, si l'application qui le représente est injective.

Théorème 7 : 1) Le noyau est un invariant total pour l'action par translation à gauche.

2) Le rang est un invariant total pour l'action par translation à droite.

Application 8 : Soit $q \in \mathbb{N}$, premier, alors on a :
$$Card(GL_m(\mathbb{F}_q)) = \prod_{k=1}^{m} (q^m - q^{k-1})$$

2. Restriction aux groupes orthogonaux.

Théorème 9 : L'application $\varphi : U_m \times H_m^{++}(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$, $(U, H) \longmapsto UH$ est un homéomorphisme.

Corollaire 10 : Soit $H \in M_m(\mathbb{C})$. Alors il existe un unique représentant hermitien dans l'orbite de H, pour l'action par translation à gauche du groupe unitaire U_m sur $M_m(\mathbb{C})$.

Application 11 : Soit $A \in GL_m(\mathbb{R})$. Alors $|||A|||_2 = (\rho({}^tAA))^{1/2}$, où $\rho(A) = \max_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda|$, et $|||A|||_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

3. Application au Pivot de Gauss.

Définition 12 : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On définit les matrices suivantes :

- matrices de transvections : $T_{ij}(\lambda) = I_m + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \neq j \leq m$.
- matrices de dilations : $D_i(\lambda) = diag(I_{i-1} ; \lambda ; I_{m-i})$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $1 \leq i \leq m$
- matrices de permutations : $P_{ij} = I_m - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$, $1 \leq i < j \leq m$

Proposition 13 : Soit $A \in M_{m,m}(\mathbb{K})$. On note L_i sa i-ème ligne, C_j sa j-ième colonne, $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, m]\!]$. Alors la multiplication à gauche de A, par :

- $T_{ij}(\lambda)$, remplace L_i par $L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $D_i(\lambda)$, remplace L_i par λL_i, $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- P_{ij}, échange L_i et L_j, $1 \leq i < j \leq m$.

Proposition 13 (suite) : La multiplication à droite de A, par :
- $T_{ij}(\lambda)$, remplace C_j par $C_j + \lambda C_i$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $D_i(\lambda)$, remplace C_i par λC_i, $i \in [\![1, m]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- P_{ij}, échange C_i et C_j. $1 \leq i < j \leq m$.

Définition 14 : On appelle <u>pivot</u> d'une ligne non nulle d'une matrice $A \in M_{m,m}(\mathbb{K})$, le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche. A est dite <u>échelonnée</u> en lignes si :
1. une ligne est nulle, les lignes suivantes le sont.
2. le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.

A est dite réduite, si elle est échelonnée, si ses pivots sont égaux à 1, et si ce sont les seuls coefficients non nuls de leur ligne.

Proposition 15 : Une matrice échelonnée avec $r \geq 1$ lignes non nulles est de rang r.

Théorème 16 : Soit $A \in M_{m,m}(\mathbb{K})$. Il existe $P \in GL_m(\mathbb{K})$ tel que $P \cdot A$ soit échelonnée (ou réduite). $P \cdot A$ est donc dans la même orbite que A, et est donc de même rang.

III Action par équivalence : $G := GL_m(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$. $E := M_{m,m}(\mathbb{K})$.

Définition 17 : L'application :
$$\begin{aligned} G \times E &\longrightarrow E \\ ((P,Q);A) &\longmapsto PAQ^{-1} \end{aligned}$$
définit une action à gauche, appelée action par équivalence.

Proposition 18 : Soit $A \in E$. Alors $rg(A) = r \geq 0$ si et seulement si elle est dans l'orbite de $J_{r,m,m} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 19 : Le rang est un invariant total pour l'action par équivalence de G sur E.

Théorème 20 : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les orbites pour l'action par équivalence sont connexes. De plus, pour $r \in \mathbb{N}^*$:
$\overline{O_r} = \bigcup_{i=1}^{r} O_i$, où $O_i = \{A \in E \mid rg(A) = i\}$.

Application 21 [Restriction à $O_m(\mathbb{R})$] : Soient $A, B \in M_m(\mathbb{R})$. Elles sont dans la même orbite pour l'action de $O_m(\mathbb{R})$ sur $M_m(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tAA$ et ${}^tBB$ ont le même spectre.

IV Action par conjugaison

1. de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $M_m(\mathbb{K})$.

Définition 22 : L'application
$$\begin{aligned} GL_m(\mathbb{K}) \times M_m(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_m(\mathbb{K}) \\ (P;A) &\longmapsto PAP^{-1} \end{aligned}$$
définit une action de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $M_m(\mathbb{K})$. Les matrices d'une même orbite sont dites semblables.

Théorème 23 : Le rang, la trace, le déterminant, les polynômes caractéristiques et minimaux sont des invariants pour l'action par conjugaison.

Contre-exemple 24 : Les invariants précédents ne sont pas totaux : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique, trace, déterminant, mais ne sont pas semblables.

Théorème 25 : (Topologie des orbites) : Dans $\mathbb{C}$, les orbites pour l'action par conjugaison sont connexes d'intérieur vide. Elles sont de plus bornées, si et seulement si réduites à une matrice scalaire.

Théorème 26 : (Diagonalisabilité) : Soit $A \in M_m(\mathbb{C})$. A est diagonalisable si et seulement si son orbite pour l'action par conjugaison est fermée.

2. Application : dénombrement de $\mathcal{N}_m(\mathbb{F}_q)$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, premier. $\mathcal{N}_m(\mathbb{F}_q)$ désigne l'ensemble des matrices nilpotentes d'ordre $m \geq 2$ (au plus) à coefficients dans $\mathbb{F}_q$.

Proposition 27 : Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
1. J est nilpotente d'ordre m, et $O(J) = \mathcal{N}_m(\mathbb{F}_q)$
2. $Stab(J) = GL_m(\mathbb{F}_q) \cap \mathbb{F}_q[J]$.

Application 28 : $$Card(\mathcal{N}_m(\mathbb{F}_q)) = \prod_{k=1}^{m-1} (q^m - q^{k-1}).$$

Développement 2.

3... de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $D_n(\mathbb{K})$.

Pour $n \geq 1$, on note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 29 : L'application $\varphi : D_n(\mathbb{C}) / GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n$

$$O(A) \longmapsto \mathrm{Spec}(A)$$

est bien définie et bijective.

Corollaire 30 : Le spectre ou le polynôme caractéristique sont des invariants totaux pour l'action par conjugaison de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $D_n(\mathbb{C})$.

Contre-exemple 31 : Le polynôme minimal n'est pas un invariant total : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ont même polynôme minimal, mais ne sont pas semblables.

V Action par congruence.

Définition 32 : L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

$$(P, A) \longmapsto PA{}^tP$$

définit une action de groupe appelée action par congruence.

Théorème 33 : [Invariants en fonction du corps.]

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le rang est un invariant total.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la signature est un invariant total.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, q premier, le discriminant est un invariant total.

Remarque 34 : Le 2) du théorème précédent est une reformulation du théorème de Sylvester.

Proposition 35 : On a :

1. $O(I_n) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
2. $\mathrm{Stab}(I_n) = O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 36 : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

Théorème 37 : (Restriction au groupe orthogonal). Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que : $PA{}^tP$ soit diagonale réelle.

Corollaire 38 : Toute orbite de l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice diagonale réelle.

Développements :

1) Décomposition polaire (théorème 9)

2) Dénombrement de $\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)$ (27 + 28)

Bibliographie :
- Algèbre . X. Gourdon
- Algèbre géométrie . J.E. Rombaldi
- Histoire héroniste de groupes et de géométrie 1 P. Caldero, J. Germoni.